Teoria Analítica dos Números

17/11/2025

1 $\zeta(s)$ e o TNP

Ja vimos como relacionar

$$\sum_{n\leq x} f(n) \rightleftarrows D_f(s),$$

com as fórmulas de Mellin e Perron (inversão de Mellin).

1.1 Séries de Dirichlet

Assim, para estudar números primos, devemos estudar

$$P(s) = \sum_p \frac{1}{p^s}$$

Porém esta função não possui continuação meromorfa em torno de $s = 1$ (ver lista).

Aqui entram as funções $p \mapsto \log p$ e $\Lambda(n)$. Nos levando a considerar

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

(Lembre que $\Lambda = \log * \mu$).

A primeira função abaixo possui o mesmo problema de $P(s)$, mas a segunda possui extensão meromorfa (segue da extensão de ζ).

Assim, o TNP em sua forma

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \sim x$$

vai ser provado usando informações analíticas sobre $-\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

Em particular, pela fórmula de Perron,

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds \quad (x \notin \mathbb{Z})$$

Se, par acaso, soubéssemos que ζ não se anula na região $\Re(s) \geq 1-\delta$, poderíamos mover o contorno de integração para a esquerda, de (c) para $(1-\delta)$, passando por um único pólo em $s=1$.

Veja que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + g(s) \quad \text{(onde } g(s) \text{ é holomorfa)}$$

Consequentemente,

$$\zeta'(s) = \frac{-1}{(s-1)^2} + g'(s)$$

Portanto, a derivada logarítmica é

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{\frac{-1}{(s-1)^2} + g'(s)}{\frac{1}{s-1} + g(s)} = \frac{1}{s-1} + h(s) \quad \text{(onde } h(s) \text{ é holomorfa)}$$

$$\operatorname{Res}_{s=1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\right) = \lim_{s\to 1}(s-1)\left(\frac{1}{s-1} + h(s)\right)\frac{x^s}{s} = x$$

Após mover o contorno, obtemos

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n) = x - \int_{(1-\delta)}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds$$

Mais uma vez apelando para a boa vontade do universo, suponha que

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{|\zeta'(1-\delta+it)|}{|\zeta(1-\delta+it)|}\,\frac{dt}{|1-\delta+it|} < +\infty.$$

Então teríamos

$$\psi(x) = x + O(x^{1-\delta})$$

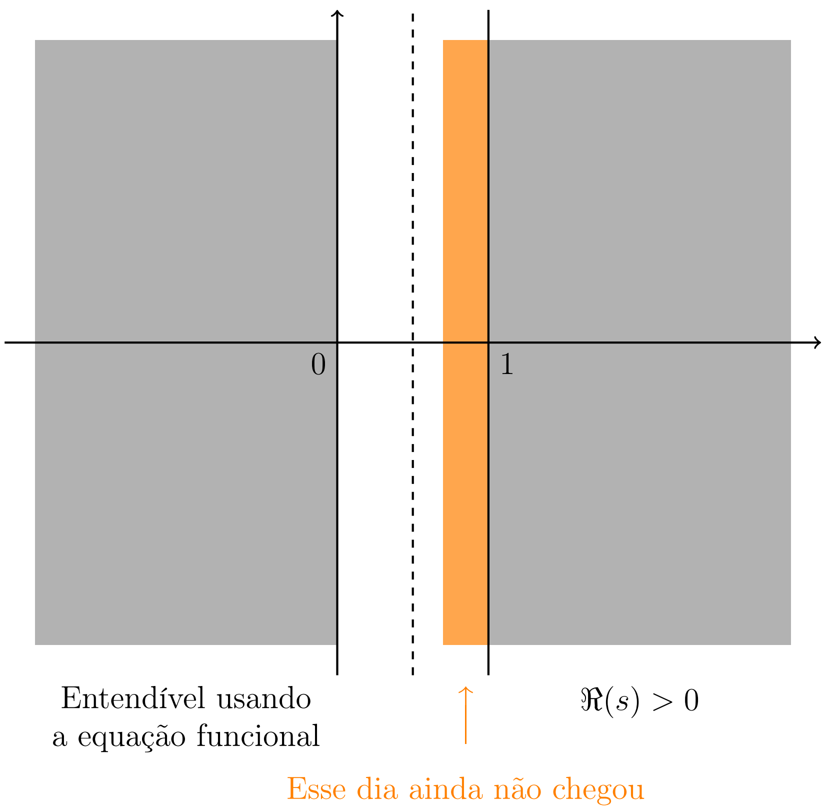
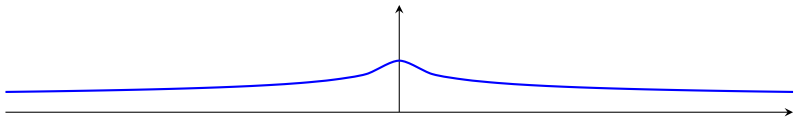


Gráfico de $f(x) = \frac{1}{\ln(x+e)}$



De la Vallée Poussin provou que existe $c_1 > 0$ tal que $\zeta(s) \neq 0$ para $s = \sigma + it$ na região

$$\sigma > 1 - \frac{c_1}{\log(|t| + e)}$$

Isso leva a uma versão efetiva do TNP com um termo de erro:

$$\psi(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$$

A comparação de ordens de magnitude é a seguinte: Para todo$\epsilon > 0$ e $A > 0$,

$$(\log x)^A \ll e^{c\sqrt{\log x}} \ll x^\epsilon \quad \text{(para } x \to \infty).$$

Assim, para provar o TNP, basta mostrar que $\zeta(1 + it) \neq 0$ para valores de σ um pouco menores do que 1 e també para $\sigma = 1$. Vamos começar com o caso $\sigma = 1$.

Teorema (de La Vallée Poussin)**.**

$$\zeta(1 + it) \neq 0 \quad \textit{para todo} \quad t \neq 0.$$

A prova usa a seguinte desigualadade geométrica (3-4-1):

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geq 0.$$

Prova da identidade: Usando que $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$,

$$\begin{aligned} 3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta &= 2 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta \\ &= 2(1 + \cos\theta)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Motivação para uso da identidade (Davenport):

Relembre a fórmula de algumas aulas atrás:

$$\log\zeta(s) = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} p^{-ms} = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} p^{-m\sigma} e^{-imt\log p}. \tag{1}$$

Se $\zeta(1 + it) = 0$, fazendo $\sigma \to 1$, a parte real da série tenderia para $-\infty$. Isto significaria que vários dos termos . Isto significaria que para vários valores de pp e m, $\cos(mt\log p)$

seria negativo. Se esse valor fosse suficientemente negativo, teriamos $\cos(2mt\log p)$ positivo, fazendo com a parte real da série em $\sigma + 2it$ tendesse para $+\infty$. Mas isso indicaria um pólo em $\sigma + 2it$. Mas já sabemos que isso não ocorre.

Prova do teorema: Considere a função

$$F(\sigma) = \zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma + it)^4 \zeta(\sigma + 2it)$$

Tomando o logaritmo de $F(\sigma)$ e usando mais uma vez (1):

$$\begin{aligned}\log F(\sigma) &= 3\log\zeta(\sigma) + 4\log\zeta(\sigma+it) + \log\zeta(\sigma+2it) \\ &= \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} p^{-m\sigma}\left(3 + 4e^{-imt\log p} + e^{-2imt\log p}\right).\end{aligned}$$

Agora, tomamos a parte real. Note que $\Re(e^{-ik\theta}) = \cos(k\theta)$.

$$\Re(\log F(\sigma)) = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} p^{-m\sigma}\left(3 + 4\cos(mt\log p) + \cos(2mt\log p)\right)$$

Usando a identidade trigonométrica (com $\theta = mt\log p$), o termo entre parênteses é ≥ 0. Logo

$$\log|F(\sigma)| = \Re(\log F(\sigma)) \geq 0 \to F(\sigma) \geq 1.$$

Suponha agora que $\zeta(1 + it) = 0$ para algum $t \neq 0$. Isto significa que para s próximo de $1 + it$,

$$\zeta(s) = (s - 1 - it)g(s),$$

onde $g(s)$ é holomorfa. Assim, perto de $\sigma = 1$,

$$\zeta(s) = O(|s - 1 - it|)$$

Por outro lado, o pólo simples de $\zeta(s)$ em $s = 1$ implica que perto de $\sigma = 1$,

$$\zeta(s) = O\left(\frac{1}{|s-1|}\right)$$

Finalmente como ζ é holomorfa em $s = 1 + 2it$, temos que perto de $1 + 2it$,

$$\zeta(s) = O(1)$$

Assim, para σ próximo de 1,

$$|F(\sigma)| = O\left(\frac{1}{|\sigma-1|^3}\right) \cdot O\left(|\sigma-1|^4\right) \cdot O\left(1\right) = O(|\sigma - 1|)$$

Mas isto implicaria que

$$\lim_{\sigma\to 1^+} |F(\sigma)| = 0$$

Isso contradiz o fato de que $|F(\sigma)| \geq 1$ para todo $\sigma > 1$. Portanto, $\zeta(1 + it) \neq 0$.

Teorema (Cotas superiores para ζ e ζ'). *Temos as seguintes desigualdades:*

$$(i) \qquad |\zeta(s)| \leq 4\frac{|t|^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0}, \qquad |t| \geq 2,\ 1/2 \leq \sigma_0 < 1,\ \sigma \geq \sigma_0,$$

$$(ii) \qquad |\zeta(s)| \leq A_1 \log|t|, \qquad |t| \geq 2, \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{4\log|t|},$$

$$(iii) \qquad |\zeta'(s)| \leq A_2(\log|t|)^2, \qquad |t| \geq 2, \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{12\log|t|},$$

onde A_1 e A_2 são constantes.

Prova do teorema:

Vamos usar a expressão

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt \quad (\text{para } \Re(s) > 1)$$

Além disso precisaremos da versão finita

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s\int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}}dt \\
&= \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s\int_1^x \frac{dt}{t^s} - s\int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt \\
&= \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + \frac{s}{1-s}\left(x^{1-s} - 1\right) - s\int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt.
\end{aligned}$$

Tomando $X = N \in \mathbb{Z}$ e subtraindo as expressões acima,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt$$

Pela desigualdade triangular, para $\sigma > 0$ e $t \neq 0$,

$$\zeta(s) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{t} + |s|\int_N^\infty \frac{1}{t^{\sigma+1}}dt$$

(Aqui usamos que $|1-s| = |(1-\sigma)+it| \geq |t|$.

Veja agora que

$$\int_N^\infty \frac{1}{t^{\sigma+1}}dt = \left(\frac{-t^{-\sigma}}{\sigma}\right)\Bigg|_X^{+\infty} = \frac{N^{-\sigma}}{\sigma}.$$

Agora, se $0 < \sigma < 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \leq \int_0^N \frac{dt}{t^\sigma} = \frac{N^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (\text{função decrescente de } \sigma).$$

Logo, se $|t| \geq 2$, $\frac{1}{2} \leq \sigma_0 < 1$ e $\sigma > \sigma_0$,

$$
\begin{aligned}
|\zeta(s)| &\leq \frac{N^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{|t|} + \frac{|s|}{\sigma} N^{-\sigma} \\
&\leq \frac{N^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0} + \frac{N^{1-\sigma_0}}{|t|} + N^{-\sigma_0} + \frac{|t|}{\sigma_0} N^{-\sigma_0}.
\end{aligned}
$$

Aqui usamos que $|s| \leq |\sigma| + |t|$. Tomando $N = \lfloor |t| \rfloor \leq |t|$,

$$
\begin{aligned}
|\zeta(s)| &\leq \frac{|t|^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0} \left(1 + \frac{1-\sigma_0}{|t|} + \frac{1-\sigma_0}{\lfloor |t| \rfloor} + \frac{(1-\sigma_0)|t|}{\sigma_0 \lfloor |t| \rfloor} \right) \\
&\leq (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1) \frac{|t|^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0} \leq \frac{5}{2} \frac{|t|^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0}.
\end{aligned}
$$

Saiu melhor que a ecomenda! Isso conclui a prova do item (i) do teorema.