Teoria Analítica dos Números

19/11/2025

Cotas superiores para a função ζ

A gente estava provando o seguinte Teorema:

Teorema (Cotas superiores para ζ e ζ')**.** *Temos as seguintes desigualdades:*

$$
\begin{aligned}
&(i) && |\zeta(s)| \leq 4\frac{|t|^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0}, && |t| \geq 2,\ 1/2 \leq \sigma_0 < 1,\ \sigma \geq \sigma_0,\\
&(ii) && |\zeta(s)| \leq A_1 \log|t|, && |t| \geq 2, \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{4\log|t|},\\
&(iii) && |\zeta'(s)| \leq A_2 (\log|t|)^2, && |t| \geq 2, \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{12\log|t|},
\end{aligned}
$$

onde A_1 e A_2 são constantes.

Prova. O item (i) foi visto na aula passada. Agora provaremos (ii) e (iii).
Prova do item (ii)**:** Veja que

$$|t| \geq 2 \Rightarrow 4\log|t| \geq \log 16 > 2$$

Isto quer dizer que

$$1 - \frac{1}{4\log|t|} \geq \frac{1}{2}$$

Pelo item (i), veja que se definirmos $\sigma_0 = 1 - \frac{1}{4\log|t|}$, temos

$$\zeta(s) \leq \frac{4 \cdot |t|^{\frac{1}{4\log|t|}}}{\frac{1}{4\log|t|}} = 16e^{1/4}\log|t|.$$

Prova do item (iii)

Se $\sigma \geq 2$, é fácil. Nest região tem-se:

$$-\zeta'(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{n^s}.$$

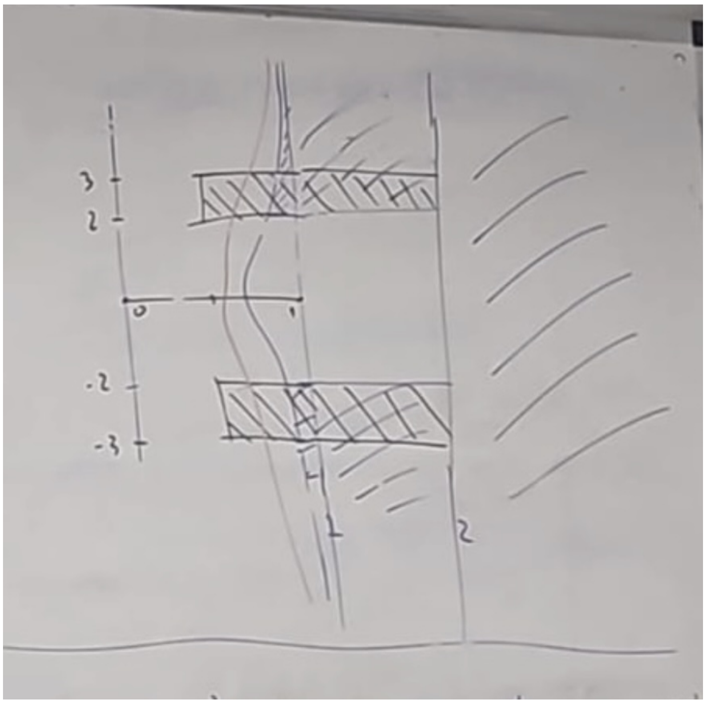
Disto deduzimos que

$$|\zeta'(s)| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{n^2} = O(1).$$

Suponha agora que s esteja na região compacta

$$\{s \in \mathbb{C} : \ 2 \leq |t| \leq 3; \ \tfrac{1}{2} \leq \sigma \leq 2\}.$$

Como, nesta região, ζ' é contínua, ela é, portanto, limitada.



Por fim, seja agora $s \in S_1 = \{s \in \mathbb{C} : |t| \geq 3, 1 - \frac{1}{12 \log |t|} \leq \sigma \leq 2\}$.

Considere o disco de centro s e raio $\delta = \frac{1}{12 \log |t|}$.

1ª Observação: Para todo $s \in S_1$, este disco está contido na região do item ii), ou seja, na região

$$\{s \in \mathbb{C} : |t| \geq 2, 1 - \frac{1}{4 \log |t|} \leq \sigma \leq 2\}.$$

De fato, seja s' tal que $|s' - s| < \delta$. Então $|\Re(s') - \Re(s)| < \frac{1}{12 \log |t|}$. Logo:

$$\begin{aligned} Re(s') > Re(s) - \delta &\geq \left(1 - \frac{1}{12 \log |t|}\right) - \frac{1}{12 \log |t|} \\ &= 1 - \frac{1}{6 \log |t|} \geq 1 - \frac{1}{4 \log |t|}. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, para a parte imaginária:

$$|\Im(s')| \geq |\Im(s)| - \delta \geq 3 - \frac{1}{12 \log 3} \geq 2.$$

Finalmente, pela fórmula integral de Cauchy, para todo $s \in S_1$,

$$\zeta'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-s|=\delta} \frac{\zeta(z)}{(z-s)^2} dz$$

Isto implica que:
$$|\zeta'(s)| \leq \frac{1}{\delta} \cdot \sup_{|z-s|=\delta} |\zeta(z)|$$
Pelo item (ii), sabemos que $|\zeta(z)| \leq A_1 \log |\Im(z)|$. Agora, para todo z no disco, $|\Im(z)| \leq |t| + \delta \leq |t| + 1$.

Conclusão:
$$|\zeta'(s)| \leq 12 \log |t| \cdot A_1 \log(|t|+1) \leq A_2 (\log |t|)^2.$$

□

Observação: Para a k-ésima derivada, o mesmo argumento diz que existem $A_k, B_k > 0$ tais que
$$\zeta^{(k)}(s) \leq A_k (\log |t|)^{k+1}$$
na região
$$\left\{ s \in \mathbb{C} : \ |t| \geq 2, \sigma \geq 1 - \frac{1}{B_k \log |t|} \right\}.$$

Cotas superiores para a função ζ

Para o Teorema dos Números Primos (TNP), precisamos de estimativas para a derivada logarítmica $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$. Portanto, ainda precisamos de uma cota para $\frac{1}{\zeta(s)}$.

Teorema (Cotas inferiores e região livre de zeros pra ζ)**.** *A seguintes afirmações sobre a função ζ são válidas:*

(i) $\zeta(s) \neq 0$ *em* $Re(s) \geq 1$.

(ii) Existem constantes $c, A > 0$ *tais que* $\zeta(s)$ *não possui zeros em*
$$\{\sigma > 1 - c, |t| \leq 2\}$$
e, nesta região, tem-se
$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq A.$$

(iii) Existem constantes $c', A' > 0$ *tais que* $\zeta(s)$ *não possui zeros em*
$$\{\sigma > 1 - \frac{c'}{(\log |t|)^9}, |t| \leq 2\}$$
e, nesta região, tem-se
$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq A' (\log |t|)^7.$$

Prova do Teorema

Prova do item i): Quando $\Re(s) > 1$, temos o produto de Euler:

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

O produto converge absolutamente, logo $\zeta(s) \neq 0$. Quando Quando $\Re(s) = 1$, $s \neq 1$, vimos na aula passada que $\zeta(s) \neq 0$ (usando a desigualdade $3 - 4 - 1$).

Prova do item ii): Para $|t| \leq 2$, a ideia é usar a continuidade. O pólo em $s = 1$ atrapalha um pouco. Para resolver o problema, considere $F(s) = (s-1)\zeta(s)$. Esta função possui extensão inteira e não se anula em $\{\Re(s) = 1\}$ (Veja que $F(1) = 1$).

Por continuidade e compacidade, existe uma região, como no enunciado, onde F não se anula. Consequentemente, ζ não se anula.

Dividindo a região $\{\sigma \geq 1 - c,\ |t| \leq 2\}$ em

$$\{1 - c \leq \sigma \leq 2,\ |t| \leq 2\} \cup \{\sigma \geq 2,\ |t| \leq 2\},$$

observamos que, na primeira região, por ser compacta, como $\frac{1}{\zeta}$ define uma função contínua em seu fecho, esta deve ser limitada aí. Por fim, na segunda região,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} \Longrightarrow \left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = O(1).$$