Teoria Analítica dos Números

24/11/2025

Estávamos provando o seguinte Teorema:

Teorema (Cotas inferiores e região livre de zeros pra ζ)**.** *A seguintes afirmações sobre a função ζ são válidas:*

(i) $\zeta(s) \neq 0$ *em* $Re(s) \geq 1$.

(ii) Existem constantes $c, A > 0$ *tais que* $\zeta(s)$ *não possui zeros em*

$$\{\sigma > 1 - c,\ \ |t| \leq 2\}$$

e, nesta região, tem-se

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leq A.$$

(iii) Existem constantes $c', A' > 0$ *tais que* $\zeta(s)$ *não possui zeros em*

$$\{\sigma > 1 - \frac{c'}{(\log|t|)^9}, |t| \leq 2\}$$

e, nesta região, tem-se

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leq A'(\log|t|)^7.$$

Os itens (i) e (ii) já foram provados na aula passada. No item (i), usamos o produto de Euler e a desigualdade 3-4-1 e no item (ii), usamos que ζ não se anula na reta $\Re(s) = 1$ + continuidade uniforme + limitação de funções contínuas em compactos.

Prova do item (iii):

Para $\sigma > 1$, temos

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Assim, se $\sigma \geq 2$, então

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = O(1),$$

que é uma estimativa melhor que $O((\log|t|)^7)$.

Suponha agora que

$$1 - \frac{c'}{(\log|t|)^A} < \sigma < 2.$$

Usamos mais uma vez a desigualdade

$$|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)| \geq 1 \quad (\sigma > 1,\ t \in \mathbb{R}).$$

Obtemos assim a estimativa:

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma+it)}\right| \leq |\zeta(\sigma)|^{\frac{3}{4}}|\zeta(\sigma+2it)|^{\frac{1}{4}}.$$

Usando que $\zeta(s)$ tem um polo simples em $s=1$, vemos que

$$|\zeta(\sigma)| \leq c_0 \cdot \frac{1}{|\sigma-1|} \quad (1 < \sigma < 2).$$

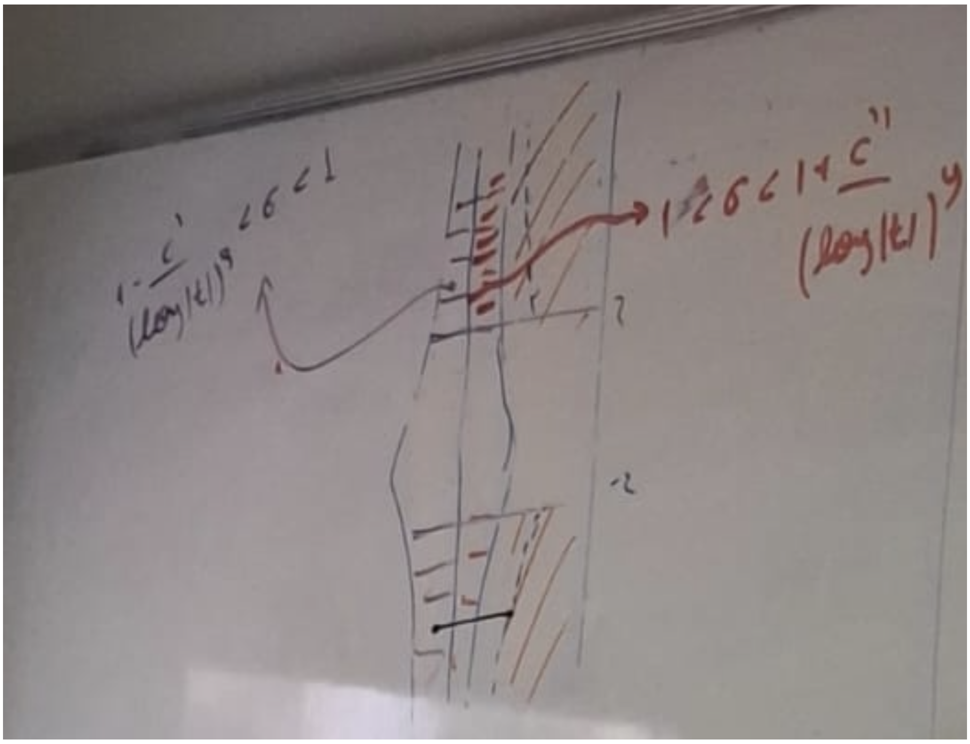
Pelo teorema sobre as cotas superiores para a função zeta, temos:

$$|\zeta(\sigma+2it)| \leq A_1 \log|2t| \leq 2A_1 \log|t|,$$

para uma certa constante A_1.

Juntando tudo, obtemos

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma+it)}\right| \leq \left(\frac{c_0}{\sigma-1}\right)^{\frac{3}{4}} (A_1 \log|t|)^{\frac{1}{4}} \quad (1 < \sigma < 2).$$



Suponha agora que s está na região

$$\left\{1+\frac{c'}{(\log|t|)^9}\leq\sigma<2,\ |t|\geq 2\right\}. \tag{1}$$

Segue da desigualdade acima que

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|\leq\left(\frac{c_0(\log|t|)^9}{c'}\right)^{\frac{3}{4}}(A_1\log|t|)^{\frac{1}{4}}=\frac{c_0^{3/4}A_1^{1/4}}{(c')^{3/4}}(\log|t|)^7.$$

Ou seja,

$$|\zeta(s)|\geq\frac{(c')^{3/4}}{c_0^{3/4}A_1^{1/4}}(\log|t|)^{-7}.$$

Considere agora s na região

$$\left\{1-\frac{c'}{(\log|t|)^9}<\sigma<1+\frac{c'}{(\log|t|)^9},\ |t|\geq 2\right\}.$$

Considere o segmento horizontal ligando s ao ponto

$$s'=1+\frac{c'}{(\log|t|)^9}+it.$$

Vamos mostrar uma cota inferior para $\zeta(s)$ utilizando uma cota inferior para $\zeta(s')$, e uma cota superior para $\zeta'(z)$, $z\in[x,x']$ e o Teorema do valor médio.

Primeiramente, como s' está na região (1), segue que

$$|\zeta(s')|\geq\frac{(c')^{3/4}}{c_0^{3/4}A_1^{1/4}}(\log|t|)^{-7}.$$

Por outro lado,

$$\zeta(s')-\zeta(s)=\int_\sigma^{1+\frac{c'}{(\log|t|)^9}}\zeta'(x+it)dx.$$

Donde,

$$|\zeta(s')-\zeta(s)|\leq\frac{2c'}{(\log|t|)^9}\sup_{x\in[\sigma,1+\frac{c'}{(\log|t|)^9}]}|\zeta'(x+it)|.$$

Pelo teorema sobre as cotas superiores de ζ e ζ', para c' suficientemente pequeno,

$$|\zeta'(x+it)|\leq A_2(\log|t|)^8.$$

Com isso,

$$|\zeta(s')-\zeta(s)|\leq\frac{2c'A_2}{(\log|t|)^7}.$$

Portanto, pela desigualdade triangular,

$$|\zeta(s)|\geq|\zeta(s')|-|\zeta(s')-\zeta(s)|\geq\left(\frac{(c')^{3/4}}{c_0^{3/4}A_1^{1/4}}-2c'A_2\right)(\log|t|)^{-7}.$$

como $c'\to 0$ mais rapidamente que $(c')^{3/4}$, tomando c' suficientemente pequeno, a constante fica positiva. Isso conclui a prova do item (iii).

O teorema a seguir combina os dois últimos em uma cota para $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

Teorema (Cotas para $\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}$). *(i) Existem constantes $c, A > 0$ tais que $\zeta(s)$ não possui zeros em*

$$\{\sigma > 1 - c,\ |t| \leq 2\}$$

e, nesta região, tem-se

$$\left|-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq A \max\left(1, \frac{1}{\sigma - 1}\right), \quad (\sigma \neq 1).$$

(ii) Existem constantes $c', A' > 0$ tais que $\zeta(s)$ não possui zeros em

$$\{\sigma > 1 - \frac{c'}{(\log|t|)^9}, |t| \leq 2\}$$

e, nesta região, tem-se

$$\left|-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq A'(\log|t|)^9.$$

Prova: O item (ii) segue diretamente dos dois teoremas anteriores. Para ver o item (i), observe que, por um lado $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ possui um pólo de ordem 1 em $s = 1$ e, por outro lado, se $\Re(s) \geq 2$,

$$\left|-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{|\Lambda(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^2} = O(1).$$

Prova do Teorema dos Números Primos

Nosso objetivo é mostrar a fórmula assintótica

$$\psi(x) \sim x.$$

Porém, como vimos, a fórmula de Perron é melhor de ser aplicada quando temos uma soma mais suave. Sendo assim, considere

$$\Psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)(x - n).$$

Pela fórmula de Perron, temos

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds \quad (a > 1).$$

Seja $x \geq 3$ e tome T um paraâmetro a ser escolhido mais tarde tal que $3 \leq T \leq x$.

Spoiler: $T = \exp(c(\log x)^{1/10})$ para alguma constante c.

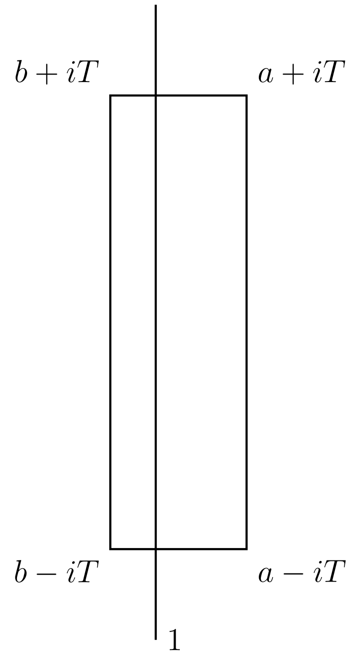
Tome $a = 1 + \frac{1}{\log x}$. Escreva

$$\int_{(a)} (\dots) = \int_{a-i\infty}^{a-iT} (\dots) + \int_{a-iT}^{a+iT} (\dots) + \int_{a+iT}^{a+i\infty} (\dots)$$

e chame as integrais do lado direito de I_-, I_0 e I_+, respectivamente. Para calcular I_0, vamos usar o teorema dos resíduos no retângulo de vértices: $a-iT$, $a+iT$, $b+iT$, $b-iT$ onde

$$b = 1 - \frac{c_0}{(\log T)^9}$$

para uma constante suficientemente pequena c_0.



Pelo teorema dos resíduos, temos a soma das integrais no contorno:

$$\int_{c-iT}^{c+iT} (\dots) + \int_{c+iT}^{b+iT} (\dots) + \int_{b+iT}^{b-iT} (\dots) + \int_{b-iT}^{c-iT} (\dots)$$
$$= 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{s=1} \left(\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \right) = 2\pi i \cdot \frac{x^2}{2}$$

A primeira integral do lado esquerdo é I_0. Chamando as outras de I_1, I_2 e I_3, respectivamente, obtemos a seguinte fórmula para $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\pi i} \left(I_+ + I_- - I_1 - I_2 - I_3 \right).$$

Vamos estimar as integrais I_+ e I_-. Observe que pelo teorema anterior, Para $\Re(s) = a$, vale a estimativa:

$$\left| -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \ll \max(1, \frac{1}{a-1}) \ll \log x.$$

Aqui usamos que $a = 1 + \frac{1}{\log x}$. Aplicando esta estimativa para $s = a + it$, $t > T$, obtemos:

$$I_+ \ll \log x \int_T^\infty \frac{x^{a+1}}{|a+it||a+1+it|} dt$$
$$\ll x^2 \log x \int_T^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{x^2 \log x}{T}.$$

De maneira análoga, $I_- \ll \frac{x^2 \log x}{T}$.

Para as integrais horizontais (por exemplo I_1), temos:

$$I_1 = \int_b^a \frac{\zeta'(y+iT)}{\zeta(y+iT)} \frac{x^{y+1+it}}{(y+iT)(y+1+iT)} dy$$

O que leva à estimativa:

$$I_1 \ll \frac{x^2}{T^2}(c-b) \sup_{y \in [b,c]} \left| -\frac{\zeta'(y+iT)}{\zeta(y+iT)} \right|$$

Por um lado, pelo teorema anterior, para todo y na domínio de integração,

$$\left| -\frac{\zeta'(y+iT)}{\zeta(y+iT)} \right| \ll (\log T)^9.$$

Por outro lado,

$$c - b = \frac{1}{\log x} + \frac{1}{(\log T)^9}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_1 &\ll \frac{x^2}{T^2}(\log T)^9 \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{(\log T)^9} \right) \\ &= \frac{x^2}{T^2} \frac{(\log T)^9}{\log x} + \frac{x^2}{T^2}. \end{aligned}$$

Análogamente, provamos a mesma estimativa para I_3.

Finalmente, para a integral I_2, sabemos pelo teorema anterior que para $s = b + it$ vale:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \begin{cases} 1 + \frac{1}{|b-1|}, & |t| \leq 2, \\ (\log |t|)^9, & |t| \geq 2. \end{cases}$$

Como $\frac{1}{1-b} \asymp (\log T)^9$, obtem-se na região considerada a cota uniforme

$$\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll (\log T)^9$$

Assim,

$$I_2 \ll (\log T)^9 x^{b+1} \int_{-T}^{T} \frac{dt}{|b+it||b+1+it|}$$

Como $|b+it||b+1+it| \geq |b+it|^2$ e $b > 1/2$ tomando c_0 suficientemente pequeno, a integral acima é

$$\ll \int_{-T}^{T} \frac{dt}{1+t^2} = O(1).$$

De modo que

$$I_2 \ll \frac{x^2 (\log T)^9}{\exp\left(c_0 \frac{\log x}{(\log T)^9} \right)}.$$

Juntando todas as estimativas acima, temos que

$$\Psi(x) = \frac{x^2}{2} + O\left(x^2\left(\frac{\log x}{T} + \frac{(\log T)^9}{T^2\log x} + \frac{1}{T^2} + \frac{(\log T)^9}{\exp\left(c_0\frac{\log x}{(\log T)^9}\right)}\right)\right) \tag{2}$$

Escolhendo $\exp\left((\log x)^{1/10}\right)$, concluímos que

$$\Psi(x) = \frac{x^2}{2} + O\left(x^2\exp(-c(\log x)^{1/10})\right),$$

para alguma constante $c > 0$.

OBS 1: Para mostrar que o termo de erro acima é admissível, precisamos utilizar as Estimativas

$$(\log x)^A \ll \exp(c(\log)^{1/10}) \ll x^\epsilon \quad (A, c, \epsilon > 0).$$

OBS 2: O motivo para a escolha de T é algo não tão trivial e requer um pouco de prá tica. Primeiramente, por conta da observação acima, podemos perceber que as potências de $\log x$ e $\log T$ são pouco relevantes para a ordem de grandeza total. Sendo assim, o termo de erro é moralmente da ordem de

$$x^2\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T^2} + \frac{1}{T^2} + \frac{1}{\exp\left(c_0\frac{\log x}{(\log T)^9}\right)}\right) \ll x^2\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{\exp\left(c_0\frac{\log x}{(\log T)^9}\right)}\right).$$

Neste ponto, observa-se que o primeiro termo é uma função decrescente de T e o segundo, uma função crescente. Segue imediatamente que pelo menos um dos termos é maior que o valor obtido quando as funções se igualam (por quê?). Forçando os dois termos a serem iguais, obtemos a cota acima que provou-se ser ótima. Um mero cálculo mostra que

$$T = \exp\left(c_0\frac{\log x}{(\log T)^9}\right) \iff T = \exp\left((c_0\log x)^{1/10}\right).$$

Como no resultado final não diz nada de concreto sobre a constante aparecendo dentro da exponencial, a escolha $T = \exp\left((\log x)^{1/10}\right)$ é suficiente.

OBS 3: Se no lugar da estimativa $-\frac{\zeta'}{\zeta} \ll (\log T)^9$ do teorema anterior, utilizarmos a estimativa $-\frac{\zeta'}{\zeta} \ll (\log T)$ de La valée Poussin o mesmo argumento acima nos daria a estimativa mais forte $O(x^2\exp(-c(\log x)^{1/2}))$.