Teoria Analítica dos Números

28/11/2025

Na aula passada mostramos que

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)(x-n) = \frac{x^2}{2} + O(x^2 R(x)), \qquad (*)$$

onde $R(x)$ é uma função da forma $R(x) = \exp(-c(\log x)^{1/10})$ para alguma $c > 0$.

Hoje vamos mostrar que $\psi(x) = x + O(xR(x))$, onde $R(x)$ é uma função da mesma forma que acima, possívelmente com uma constante c possívelmente diferente. A seguir utilizaremos repetidamente essa convenção em que $R(x)$ é uma função da forma $\exp(-c(\log x)^{1/10})$, onde a constante $c > 0$ que pode mudar de linha para linha.

Primeiramente observe que

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)(x-n) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \int_n^x dt$$

Ou seja, $\Psi(x) = \int_2^x \psi(t)\, dt$. Donde,

$$\Psi(x) - \Psi((1-\delta)x) = \int_{(1-\delta)x}^x \psi(t)\, dt.$$

Como a função ψ é crescente, segue que

$$\psi(x) \geq \int_{(1-\delta)x}^x \psi(t)\, dt = \Psi(x) - \Psi((1-\delta)x).$$

Utilizando duas vezes $(*)$, vemos que

$$\psi(x) \geq \frac{x^2}{2} - \frac{(1-\delta)^2 x^2}{2} + O(x^2 R(x)) + O(x^2 R((1-\delta)x)).$$

Supondo que $\delta \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} R((1-\delta)x) &\leq R\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \exp\left(-c\left(\log \frac{x}{2}\right)^{1/10}\right) \\ &\leq \exp\left(-c'(\log x)^{1/10}\right), \end{aligned}$$

onde c' é uma constante independente de δ.

Ou seja, usando nossa convenção (ou abusando da notação, como preferir),

$$R((1-\delta)x) = R(x)$$

Com isso, obtemos:

$$\delta x\psi(x) \geq (2\delta - \delta^2)\frac{x^2}{2} + O(x^2R(x)).$$

Dividindo por x:

$$\psi(x) \geq \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{\delta}xR(x)\right).$$

Mas isto implica que

$$\psi(x) \geq x + O\left(\delta x + \frac{xR(x)}{\delta}\right)$$

Tomando $\delta = \sqrt{R(x)}$,

$$\psi(x) \geq x + O(x\sqrt{R(x)}) = \psi(x) \geq x + O(xR(x))$$

pois, mais uma vez por conta de nossa convenção,

$$\sqrt{R(x)} = R(x).$$

Analogamente, comparando δx e $\int_x^{(1+\delta)x} \psi(t)dt$, segue que

$$\psi(x) \leq x + O(xR(x))$$

Isso conclui a prova do TNP.

Corolário (Formas alternativas do TNP)**.** *As seguintes fórmulas assintóticas sobre os números primos são verdadeiras:*

i) $\theta(x) = x + O(xR(x))$,

ii) $\pi(x) = Li(x) + O(xR(x))$,

iii) $\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + c_1 + O(R(x))$,

iv) $\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + c_2 + O(R(x))$,

v) $\prod_{p\leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x}(1 + O(R(x)))$,

onde $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ *e* c_1 *e* c_2 *são as mesmas constante aparecendo no Teorema de Mertens.*

Prova: Soma por partes.

OBS: A segunda fórmula nos diz em particular que a seguinte fórmula é falsa:

$$\cancel{\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O(xR(x))}.$$

Na verdade, tem-se a seguinte expansão assintótica para $\pi(x)$: Para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$:

$$\pi(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(j-1)!x}{(\log x)^j} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{k+1}}\right).$$

Também temos um TNP para a função de Möbius:

Teorema.

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = O(xR(x))$$

prova: A ideia é fazer o mesmo que fizemos antes, trocando Λ (von Mangoldt) por μ e $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ por $\frac{1}{\zeta}$.

- Não-anulação de ζ e estimativas para $\frac{1}{\zeta(s)}$: ok.
- Localização dos pólos e $\frac{1}{\zeta(s)}$: Não há pólo em $s = 1$ nem na região sem zeros. Por isso não há termo principal na fórmula.

A única parte do argumento que não funciona aqui é a parte final em que usamos que a função $\psi(x)$ é crescente. (A soma da função de Möbius oscila).

Exercício: Encontrar um argumento que funcione.

Possíveis maneiras de fazê-lo:

1. Usar a fórmula de Perron direta para $\sum \mu(n)$ e não para $\sum_{n \leq x} \mu(n)(x-n)$.
2. Tentar deduzir $\sum_{n \leq x} \mu(n) = O(xR(x))$ partindo de $\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(xR(x))$, Como fizemos para mostrar, no Cap. 3, que o TNP (sem termo de erro específico) implica
$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x).$$

O TNP é o primeiro passo conectando as informações sobre $\zeta(s)$ na região $\{0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ e $\pi(x)$ (ou $\psi(x)$). Quanto mais informações soubermos sobre ζ, mais informações teremos sobre os primos.

Outros resultados:

Teorema (Fórmula explícita para $\psi_1(x)$)**.**

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \sum_\rho \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}x + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} - \sum_{n\geq 1} \frac{x^{1-2n}}{2n(2n-1)},$$

onde a soma sobre ρ percorre todos os zeros de ζ na região $\{0 < \Re(s) < 1\}$.

OBS: Tópico para um dos seminários! (Junto com a prova do termo de erro $O(x\exp(-c\sqrt{\log x}))$).

Para tirar proveito da fórmula explícita, precisamos de algumas informações sobre o conjunto $\mathcal{Z} = \{\rho \in \mathbb{C};\ 0 < \Re(\rho) < 1 \text{ e } \zeta(\rho) = 0\}$. Por exemplo,

Teorema. *Seja $T \geq 10$ e defina*

$$N(T) = \#\{\rho \in \mathcal{Z};\ |\Im(\rho)| \leq T\}.$$

Então vale a fórmula:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

Em particular, temos as seguintes estimativas:

$$\sum_\rho \frac{1}{|\rho|^2} < +\infty \tag{A}$$

$$\sum_{|\Im(\rho)|\leq T} \frac{1}{|\rho|} \asymp (\log T)^2 \tag{B}$$

Temos também uma fórmula explícita para $\psi(x)$ (não suave):

$$\sideset{}{'}\sum_{n\leq x} \Lambda(n) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}).$$

Exercício: Aqui $\sum'$ significa que se x é inteiro, o termo $\Lambda(x)$ é contado com peso $1/2$.

Estimando o rabo da série, podemos mostrar que

$$\psi(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) + O\left(\frac{x^2(\log x)^2}{T}\right)$$

Combinando esta fórmula com a estimativa (B) acima regue que se existe $\theta > 1$ tal que $\Re(\rho) \leq \theta$ para todo $\rho \in \mathcal{Z}$, então teríamos

$$\psi(x) = x + O\left(x^\theta(\log x)^2\right).$$

Em particular, a Hipótese de Riemann implicaria que

$$\psi(x) = x + O\left(x^{1/2}(\log x)^2\right).$$