Teoria Analítica dos Números

05/12/2025

Na aula passada vimos que

- # caracteres módulo $q = \phi(q)$.
- Dados $a, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$, $(a, q) = 1$ e $a \not\equiv 1 \pmod q$. Então existe um caractere χ módulo q tal que $\chi(a) \neq 1$.

Hoje veremos como utilizar estes resultados para provar o seguinte:

Teorema (Ortogonalidade de caracteres)**.** *Seja $q \in \mathbb{Z}_{>0}$. Então valem:*

i) Para todo χ caractere módulo q,

$$\sum_{a=1}^{q} \chi(a) = \begin{cases} \phi(q) & \textit{se } \chi = \chi_0 \\ 0 & \textit{c.c.} \end{cases}$$

ii) Para todo $a \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{\chi \pmod q} \chi(a) = \begin{cases} \phi(q) & \textit{se } a \equiv 1 \pmod q \\ 0 & \textit{c.c.} \end{cases}$$

A soma acima é tomada sobre todos os caracteres módulo q. Na notação da aula passada: $\chi \in \mathfrak{X}_q$.

iii) Dados χ_1, χ_2 caracteres mod q,

$$\sum_{a=1}^{q} \chi_1(a)\overline{\chi_2(a)} = \begin{cases} \phi(q) & \textit{se } \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & \textit{c.c.} \end{cases}$$

iv) Dados $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ com $(a_1, q) = (a_2, q) = 1$:

$$\sum_{\chi \pmod q} \chi(a_1)\overline{\chi(a_2)} = \begin{cases} \phi(q) & \textit{se } a_1 \equiv a_2 \pmod q,\ (a_1, q) = 1, \\ 0 & \textit{c.c.} \end{cases}$$

Aqui, mais uma vez, a soma é tomada sobre todos os caracteres módulo q.

OBS: *Nos itens i) e iii) podemos trocar a soma sobre $1 \leq a \leq q$ por $a \in S$, onde S é um Sistema Completo de Restos módulo q.*

Prova:

i) Se $\chi = \chi_0$ é o caractere principal,

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } (a, q) = 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Portanto,

$$\sum_{a=1}^{q} \chi_0(a) = \#\{1 \leq a \leq q : (a, q) = 1\} = \phi(q).$$

Seja agora $\chi \neq \chi_0$. Por definição, existe b tal que $(b, q) = 1$ e $\chi(b) \neq 1$. Segue de um fato básico de teoria dos números que o conjunto $\{b, 2n, \ldots, bq\}$ é um sistema completo de restos módulo q. Assim, seja

$$S = \sum_{a=1}^{q} \chi(a).$$

Então

$$\chi(b)S = \sum_{a=1}^{q} \chi(b)\chi(a) = \sum_{a=1}^{q} \chi(ab) = \sum_{a' \in \{b, \ldots, bq\}} \chi(a').$$

Pela observação abaixo do teorema, temos que

$$\sum_{a' \in \{b, \ldots, bq\}} \chi(a') = S.$$

Ou seja, temos que

$$\chi(b)S = S \implies (\chi(b) - 1)S = 0.$$

Como $\chi(b) \neq 1$, segue que $S = 0$.

ii) A prova é semelhante. Se $a \equiv 1 \pmod q$, então é claro que $\chi(a) = 1$ para todo caractereχ módulo q. Portanto a soma é igual a

$$\#\{\text{caracteres mod } q\} = \phi(q).$$

Seja agora $a \not\equiv 1 \pmod q$ com $(a, q) = 1$. Pelo teorema da aula passada, existe χ_1 tal que $\chi_1(a) \neq 1$. Seja

$$S = \sum_{\chi \pmod q} \chi(a).$$

Então

$$\chi_1(a)S = \sum_{\chi \pmod q} \chi(a)\chi_1(a) = \sum_{\chi \pmod q} (\chi\chi_1)(a).$$

Lembre que os caracteres de Dirichlet formam um grupo com respeito à multiplicação ponto-a-ponto. Isso significa que o conjunto $\{\chi\chi_1 : \chi \pmod q\}$ é simplesmente o próprio conjunto dos caracteres mod q. Assim,

$$\chi_1(a)S = \sum_{\chi \pmod q} \chi\chi_1(a) = \sum_{\chi \pmod q} \chi(a) = S.$$

Assim como no caso anterior, como $\chi_1(a) \neq 1$, segue que $S = 0$.

iii) Segue de *i*), utilizando mais uma vez que o conjunto de caracteres módulo q é grupo. Vale lembrar que o elemento neutro é χ_0 e $\chi_1\overline{\chi_2} = \chi_1\chi_2^{-1}$.

iv) Segue de *ii*) usando a estrutura de grupo de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

Referência para caracteres: Serre: A Course in Arithmetic, Capítulo VI.

As relações de ortogonalidade nos permitem construir uma "Teoria de Fourier" para funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ com período q e tais que $f(n) = 0$ sempre que $(n, q) > 1$.

OBS: Podemos estender naturalmente caracteres de Dirichlet para os inteiros. Por exemplo $\chi(-3) := \chi(q - 3)$.

Exemplo: $f = 1_{(n,q)=1}$.

Não há o que fazer: $f = \chi_0$.

Exemplo: Seja $q = p$ um primo ímpar e seja

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é resíduo quadrático mod } p \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

OBS: Por definição 0 não é considerado resíduo quadrático.

Já sabemos que o símbolo de Legendre $\chi(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$ é um caractere. Com essa escolha de χ,

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é um resíduo quadrático} \\ -1 & \text{se } n \text{ é um resíduo não-quadrático} \\ 0 & \text{se } n \equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

Somando 1 e dividindo por dois obtemos um resultado muito próximo da função f acima.

$$\frac{1 + \chi(n)}{2} = \begin{cases} f(n) & \text{se } n \not\equiv 0 \pmod p \\ \frac{1}{2} & \text{se } n \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

Na verdade a função 1 não tem suporte nos números $(n, q) = 1$. Seu parente mais próximo com essa propriedade é o caractere principal χ_0.

E de fato, podemos escrever

$$f(n) = \frac{1}{2}\chi_0(n) + \frac{1}{2}\chi(n).$$

Exemplo: Seja $(a,q)=1$ e considere

$$f(n) = 1_{n\equiv a \pmod q}.$$

Pelo item iv) do teorema anterior,sabemos que

$$\sum_{\chi \pmod q} \chi(n)\overline{\chi}(a) = \begin{cases} \phi(q) & \text{se } n \equiv a \pmod q \text{ e } (a,q)=1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Ou seja,

$$1_{n\equiv a \pmod q} = \sum_{\chi \pmod q} \frac{\overline{\chi}(a)}{\phi(q)}\chi(n) \qquad (*)$$

Na verdade a partir deste exemplo podemos mostrar que toda função $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ com $f(n)=0$ para $(n,q)>1$ se escreve como soma de caracteres. De fato, para todo $n\in\mathbb{Z}$,

$$f(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} f(a)\cdot 1_{n\equiv a \pmod q}.$$

Usando a fórmula $(*)$, podemos provar o seguinte resultado:

Teorema. *Seja $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ de período q com $f(n)=0$ se $(n,q)>1$. Então para cada caractere de Dirichlet χ mod q, existem números complexos c_χ tais que*

$$f(n) = \sum_{\chi \pmod q} c_\chi \chi(n).$$

Além disso, c_χ pode ser obtido da seguinte maneira:

$$c_\chi = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} f(a)\overline{\chi}(a).$$

Voltando ao Teorema de Dirichlet

Nosso objetivo é estudar a série

$$\sum_{p\equiv a \pmod q} \frac{1}{p^s}$$

Pela fórmula $*$, sabe-se que

$$\sum_{p\equiv a \pmod q} \frac{1}{p^s} = \sum_{\chi \pmod q} \frac{\overline{\chi}(a)}{\phi(q)} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \qquad (**)$$

Isso nos conduz ao estudo de

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$$

Lembre que no caso do TNP, nós estudamos a série $\sum \frac{1}{p^s}$. Para tal, mostramos que

$$\sum \frac{1}{p^s} = \log \zeta(s) - \sum_{p} \sum_{m \geq 2} \frac{1}{mp^{ms}},$$

onde a segunda série converge absolutamente para $\Re(s) > 1/2$. Em particular em uma vizinhança de $\Re(s) = 1$, temos

$$\sum \frac{1}{p^s} = \log \zeta(s) + O(1).$$

Como os caracteres χ são completamente multiplicativos, podemos fazer algo semelhante:

$$\sum_{n} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Portanto,

$$\log\left(\sum_{n} \frac{\chi(n)}{n^s}\right) = \sum_{p} \sum_{m} \frac{\chi(p)^m}{mp^{ms}} \iff$$

$$\iff \sum \frac{\chi(p)}{p^s} = \log\left(\sum_{n} \frac{\chi(n)}{n^s}\right) - \sum_{p} \sum_{m \geq 2} \frac{\chi(p)^m}{mp^{ms}}$$

$$\iff \sum \frac{\chi(p)}{p^s} = \log\left(\sum_{n} \frac{\chi(n)}{n^s}\right) + O(1).$$

Isso nos leva ao estudo de

$$\log\left(\sum_{n} \frac{\chi(n)}{n^s}\right).$$

A série de Dirichlet de um caractere χ $D_\chi(s)$, por motivos históricos, é chamada de função L de Dirichlet associada ao caractere χ e denotada por $L(s, \chi)$.

Primeiramente, se $\chi = \chi_0$,

$$L(s, \chi_0) = \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Portanto,

$$\log L(s, \chi_0) = \log \zeta(s) + O(1).$$

Assim, separando a contribuição de $\chi = \chi_0$ na fórmula $(**)$, temos

$$\sum_{p \equiv a \pmod q} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\phi(q)} \log \zeta(s) + \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\substack{\chi \pmod q \\ \chi \neq \chi_0}} \overline{\chi}(a) \log L(s, \chi) + O(1)$$

Queremos tomar $s = \sigma > 1$ e fazer $\sigma \to 1^+$.

A ideia é que o primeiro termo à direita seja a "parte principal" e o segundo termo seja parte oscilante (contribua para o termo de erro). Para mostrar isto, iremos mostrar que o limite $L_\chi = \lim_{s\to 1} L(s,\chi)$ existe e é diferente de 0. Isto garante que

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(a) \log L(s,\chi) = O(1)$$

Consequentemente,

$$\sum_{p\equiv a(q)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\phi(q)} \log \zeta(s) + O(1),$$

provando o teorema de Dirichlet.

Na próxima aula vamos mostrar que de fato L_χ existe e é diferente de 0. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado mais geral:

Teorema (Extensão meromorfa e não anulação de $L(s,\chi)$)**.** *Seja χ um caractere de Dirichlet. Então a série definindo $L(s,\chi)$ converge absolutamente para $Re(s) > 1$ e possui extensão meromorfa à região $\{s \in \mathbb{C}; Re(s) > 0\}$ com único (possível) polo em $s = 1$, que só ocorre no caso em que $\chi = \chi_0$. Além disso, quando $\chi \neq \chi_0$,*

$$L(1,\chi) \neq 0.$$