Teoria Analítica dos Números

08/12/2025

1 Funções L de Dirichlet

Como vimos na aula passada, a prova do teorema de Dirichlet passa pelo estudo das funções L.

Definição (Função L de Dirichlet)**.**

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \Re(s) > 1.$$

Como $\chi(n) = 0$ ou $\chi(n) =$ raiz da unidade, a série converge absolutamente para $\Re(s) > 1$. Nosso objetivo é mostrar que estas funções possuem extensão meromorfa à região $\Re(s) > 0$. Para isto, usamos o seguinte resultado:

Lema. *Seja $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ e χ um caractere módulo q.*

i) Se $\chi \neq \chi_0$,

$$\left| \sum_{n \leq x} \chi(n) \right| \leq \phi(q)$$

ii) Se $\chi = \chi_0$,

$$\left| \sum_{n \leq x} \chi_0(n) - \frac{\phi(q)}{q} x \right| \leq 2\phi(q)$$

Prova:

Pelas relações de ortogonalidade, se $\chi \neq \chi_0$,

$$\sum_{n=1}^{q} \chi(n) = 0.$$

Pela periodicidade, temos para todo $k \geq 0$,

$$\sum_{n=(k-1)q+1}^{kq} \chi(n) = 0.$$

Logo,

$$\sum_{n\le x}\chi(n)=\sum_{n=1}^{q}\chi(n)+\cdots+\sum_{n=(k-1)q+1}^{kq}\chi(n)+\sum_{kq+1\le n\le x}\chi(n)$$

$$=\sum_{kq+1\le n\le x}\chi(n)$$

onde $k=\lfloor\frac{x}{q}\rfloor$. Assim,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\le x}\chi(n)\right| &\le \sum_{kq+1\le n\le x}|\chi(n)|\\ &=\#\{kq+1\le n\le x;\gcd(n,q)=1\}.\end{aligned}$$

Como $x<(k+1)q$, o número de inteiros no intervalo $\{kq+1,\ldots,(k+1)q\}$ coprimos com q é no máximo $\phi(q)$, já qie $\{kq+1,\ldots,(k+1)q\}$ é um Sistema Completo de Restos módulo q.

Para o caso $\chi=\chi_0$, a prova é semelhante, com a diferença que

$$\sum_{n=1}^{q}\chi_0(n)=\phi(q).$$

Repetindo o argumento acima, segue que

$$\sum_{n=1}^{q}\chi_0(n)=\phi(q).$$

Repetindo o argumento acima, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\chi_0(n) &= \lfloor\frac{x}{q}\rfloor\phi(q)+\sum_{\kappa q+1\le n\le x}\chi_0(n)\\ &=\frac{\phi(q)}{q}x-\left\{\frac{x}{q}\right\}\phi(q)+\sum_{\kappa q+1\le n\le x}\chi_0(n)\end{aligned}$$

É fácil ver que os dois últimos termos são limitados por $\phi(q)$.

Consequências

Para q fixo, o lema acima diz que

$$\sum_{n\le x}\chi(n)=\begin{cases}O(1)\text{ se }\chi\ne\chi_0,\\ \frac{\phi(q)}{q}+O(1)\text{ se }\chi=\chi_0.\end{cases}$$

Pelo Teorema 4.13 do Hildebrand, $L(s,\chi)$ possui continuação meromorfa na região $\Re(s) > 0$ com um único polo (simples) se $\chi = \chi_0$ em $s = 1$ e, além disso,

$$\operatorname{Res}_{s=1} L(s,\chi_0) = \frac{\phi(q)}{q}.$$

Exercício: Sejam $\sigma_c(\chi)$ e $\sigma_a(\chi)$ as abscissas de convergência simples e absoluta de $L(s,\chi)$, respectivamente. Mostre que $\sigma_a(\chi) = 1$ e

$$\sigma_c(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi \neq \chi_0 \\ 1 & \text{se } \chi = \chi_0 \end{cases}.$$

Produto de Euler

Como χ é completamente multiplicativa, vale o produto de Euler para $\Re(s) > 1$:

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \cdots\right) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

Em particular, para $\chi = \chi_0$:

$$L(s,\chi_0) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Obtemos

$$L(s,\chi_0) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Como a função $\prod_{p|q}(1 - \frac{1}{p^s})$ é uma função inteira e ζ admite uma extrensão mermomorfa a todo o plano complexo, o mesmo vale para $L(s,\chi_0)$, utilizando a igualdade acima.

Em particular,

$$\{\text{Zeros de } L(s,\chi_0)\} \subset \{\text{Zeros de } \zeta(s)\} \cup \{\text{Zeros de } \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),\ p \mid q\},$$

porém todos os zeros de $1 - \frac{1}{p^s}$ estão em $\{\Re(s) = 0\}$. Portanto, perto de $s = 1$, as funções $L(s,\chi_0)$ e $\zeta(s)$ são bem parecidas.

O próximo resultado é o ingrediente principal da prova do teorema de Dirichlet:

Teorema (Não-anulação das funções L de Dirichlet)**.** *Para χ não principal, $L(1,\chi) \neq 0$.*

Prova: Vamos dividir em dois casos a depender se χ é real ou não-real. Lembre que χ é real se todos os valores de $\chi(n)$ são números reais. Note que isso significa $\chi(n) \in \{-1, 0, 1\}$ ou, alternativamente, que $\chi^2(n) = \chi_0(n)$.

Caso χ não-real

Na prova de que $\zeta(1+it) \neq 0$, $t \neq 0$, utilizamos a seguinte expressão:

$$\log \zeta(\sigma+it) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{mp^{m\sigma}} p^{-imt}$$

De maneira análoga temos:

$$\begin{aligned}\log L(\sigma,\chi) &= \log \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^\sigma}\right)^{-1} \\ &= \sum_p \log \left[\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^\sigma}\right)^{-1}\right] \\ &= \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{1}{mp^{m\sigma}} \chi(p)^m.\end{aligned}$$

Note que

$$\chi(p) = \begin{cases} 0 \text{ se } p \mid q, \\ e^{i\theta_p} \text{ para algum } \theta_p \in \mathbb{R} \text{ se } p \nmid q. \end{cases}$$

Substituindo acima, temos que

$$\log L(s,\chi) = \sum_{p \nmid q} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\sigma}} e^{im\theta_p}$$

Seja $\chi(p) = e^{i\theta_p}$ para $\chi(p) \neq 0$. De maneira análoga:

$$\log L(s,\chi^2) = \sum_{p \nmid q} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\sigma}} e^{2im\theta_p}, \quad \log L(s,\chi_0) = \sum_{p \nmid q} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\sigma}} 1.$$

Assim, definindo

$$R(s) = 3\log L(s,\chi_0) + 4\log L(s,\chi) + \log L(s,\chi^2),$$

tem-se

$$\Re(R(s)) = \sum_{p \nmid q} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\sigma}} \Re(3 + 4e^{im\theta_p} + e^{2im\theta_p}).$$

Agora,

$$\Re(3 + 4e^{im\theta_p} + e^{2im\theta_p}) = 3 + 4\cos(\theta_p) + \cos(2\theta_p \geq 0)$$

pela identidade trigonométrica 3-4-1. Consequentemente,

$$\Re(R(s)) = \log \left| L(s,\chi_0)^3 L(s,\chi)^4 L(s,\chi^2) \right| \geq 0.$$

Donde segue que

$$|L(s,\chi_0)^3 L(s,\chi)^4 L(s,\chi^2)| \geq 1. \tag{\#}$$

O resto da orgumento segue exatamente como no Teorema nos números primos: s

Suponha que $L(s,\chi)$ tenha um zero em $s=1$. Isso significaria que $L(s,\chi)=(s-1)F(s)$, com $F(s)$ meromorfa em uma vizinhança de $s=1$. Por outro lado, sabemos que:

- $L(s,\chi_0)=\frac{G(s)}{s-1}$ (com G holomorfa),
- $L(s,\chi^2)=H(s)$ (com H holomorfa, pois $\chi^2\neq\chi_0$).

Substituindo em (#), obtemos

$$|(s-1)F(\sigma)^3G(\sigma)^4H(\sigma)|\geq 1,$$

com $F,\ G,\ H$ holomorfas em $s=1$ Fazendo $\sigma\to 1$, temos uma contradição.

Caso χ real

Considere a função de convolução $f=1*\chi$. Vamos precisar do seguintes resultados:

Lemas Auxiliares

Lema. *Seja χ um caractere real e f como acima. Então*

$$f(n)\geq\begin{cases}1 & \textit{se } n \textit{ é um quadrado}\\ 0 & \textit{caso contrário}\end{cases}$$

Prova Como χ é multiplicativa, f também o é. Logo, basta verificar a desigualdade acima para potências de primos $n=p^k$. Escreva

$$f(p^k)=\sum_{j=0}^{k}\chi(p^j)$$

Como χ é real, $\chi(p)\in\{-1,0,1\}$. Vamos provar a desigualdade em cada um dos casos.

1. Se $\chi(p)=-1$: $f(p^k)=1+(-1)+1+(-1)+\cdots=0\begin{cases}0 \text{ se } k \text{ ímpar,}\\ 1 \text{ se } k \text{ par.}\end{cases}$
2. Se $\chi(p)=0$: $f(p^k)=1+0+\cdots+0=1$.
3. Se $\chi(p)=1$: $f(p^k)=1+1+\cdots+1=k+1$.

veja que em todos os casos temos $f(p^k)\geq 0$ e, se k é par, vale que $f(p^k)\geq 1$, concluindo a prova do lema.

O lema abaixo foi visto há bastante tempo. Segue, por exemplo, somando por partes.

Lema.

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + A + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

O próximo resultado já foi visto caso da função zeta e a prova é análoga. Vamos escrevê-la aqui por conveniência do leitor.

Lema. *Seja* $\chi \neq \chi_0$ *e* $\Re(s) = \sigma > 0$.

$$\sum_{n\le x}\frac{\chi(n)}{n^s} = L(s,\chi) + O(x^{-\sigma})$$

Prova: Usando a Soma de Abel,

$$\sum_{n\le x}\frac{\chi(n)}{n^s} = \frac{S_\chi(x)}{x^s} + s\int_1^x S_\chi(t)t^{-s-1}dt$$

Tomando $\Re(s) > 1$ e fazendo $x \to \infty$, temos

$$L(s,\chi) = s\int_1^{+\infty} S_\chi(t)t^{-s-1}dt.$$

Além disso , como $S_\chi(t) = \sum_{n\le t}\chi(n) = O(1)$, a expressão do lado direito fornece uma extensão de $L(s,\chi)$ para $\Re(s) > 0$. Subtraindo as expressões:

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\frac{\chi(n)}{n^s} &= L(s,\chi) + \frac{S_\chi(x)}{x^s} - s\int_x^{+\infty} S_\chi(t)t^{-s-1}dt\\ &= L(s,\chi) + O(x^{-\sigma}) + O\left(\int_x^{\infty} t^{-\sigma-1}dt\right)\\ &= L(s,\chi) + O(x^{-\sigma}).\end{aligned}$$

Prova (da não-anulação de $L(1,\chi)$ quando χ é real)

A ideia é mostrar que a função $f = 1 * \chi$ é "grande demais" para que D_f seja holomorfa em $s = 1$.

Considere a soma

$$S(x) = \sum_{n\le x}\frac{f(n)}{\sqrt{n}}.$$

Pela minoração $f(n) \ge \mathbf{1}_{n=\square}$, temos que

$$S(x) \ge \sum_{m\le\sqrt{x}}\frac{1}{m} \gg \log x. \tag{$\star$}$$

Por outro lado, pela definição de f:

$$S(x) = \sum_{n\le x}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{n_1n_2=n}\chi(n_2) = \sum_{n_1n_2\le x}\frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\chi(n_2).$$

Pelo método da hipérbole (com $y = \sqrt{x}$):

$$S(x) = S_I + S_{II} - S_{III},$$

onde

$$\begin{cases} S_I = \displaystyle\sum_{n_1 \le \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{n_1}} \sum_{n_2 \le x/n_1} \frac{\chi(n_2)}{\sqrt{n_2}}, \\ S_{II} = \displaystyle\sum_{n_2 \le \sqrt{x}} \frac{\chi(n_2)}{\sqrt{n_2}} \sum_{n_1 \le x/n_2} \frac{1}{\sqrt{n_1}}, \\ S_{III} = \left(\displaystyle\sum_{n_1 \le \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{n_1}}\right) \left(\displaystyle\sum_{n_2 \le \sqrt{x}} \frac{\chi(n_2)}{\sqrt{n_2}}\right). \end{cases}$$

Usando os lemas acima, temos que

$$\begin{aligned} S_I &= \sum_{n_1 \le \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{n_1}} \left(L(\tfrac{1}{2}, \chi) + O\left((x/n_1)^{-1/2}\right)\right) \\ &= L(\tfrac{1}{2}, \chi)\left(2x^{1/4} + A + O(x^{-1/4})\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n_1 \le \sqrt{x}} 1\right) \\ &= 2L(\tfrac{1}{2}, \chi) x^{1/4} + O(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{II} &= \sum_{n_2 \le \sqrt{x}} \frac{\chi(n_2)}{\sqrt{n_2}} \left(2\sqrt{\frac{x}{n_2}} + A + O\left(\left(\frac{x}{n_2}\right)^{-1/2}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{x} \sum_{n_2 \le \sqrt{x}} \frac{\chi(n_2)}{n_2} + A \sum_{n_2 \le \sqrt{x}} \frac{\chi(n_2)}{\sqrt{n_2}} + O(1) \\ &= 2\sqrt{x}\left(L(1, \chi) + O(x^{-1/2})\right) + A\left(L(\frac{1}{2}, \chi) + O(x^{-1/4})\right) + O(1) \\ &= 2L(1, \chi)\sqrt{x} + O(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{III} &= \left(2x^{1/4} + A + O(x^{-1/4})\right)\left(L(\tfrac{1}{2}, \chi) + O(x^{-1/4})\right) \\ &= 2x^{1/4} L(\tfrac{1}{2}, \chi) + O(1) \end{aligned}$$

De modo que

$$S(x) = S_I + S_{II} - S_{III} = 2L(1, \chi)\sqrt{x} + O(1).$$

Segue que se $L(1, \chi) = 0$, teríamos $S(x) = O(x^{1/4})$, o que contradiz a estimativa $(\star)$. Logo, temos que $L(1, \chi) \neq 0$ também no caso em que χ é real, concluindo a prova do teorema. Isso conclui o teorema de Dirichlet e o curso ☹.